



## MODELAGEM MATEMÁTICA DE QUEDA DE PROJÉTIL À RESISTÊNCIA DO AR ATRAVÉS DE MÉTODO ANALÍTICO ASSISTIDO POR COMPUTADOR

CASTILHO, E. R. S<sup>1</sup>.  
GONÇALVES, R. N. S<sup>2</sup>.  
ANDRADE, J. E<sup>3</sup>.

### 1. INTRODUÇÃO

A Física desempenha um papel fundamental no desenvolvimento científico, não só por estar na base das ciências naturais, mas também porque desde seus primórdios sua formulação se baseia na linguagem Matemática, que é precisa, exata, fornecendo métodos teóricos poderosíssimos, que permitiram avanços estupendos no século XX, a tal ponto que este foi considerado o século da Física. Não bastasse sua relevância para o desenvolvimento científico, também o desenvolvimento tecnológico depende fortemente da Física. Mas de que trata o trabalho coletivo dos físicos, que produz o saber científico em Física? Essencialmente, físicos criam modelos científicos que podem descrever, representar e/ou prever fenômenos físicos com determinado grau de precisão [3]-[4].

Dessa forma, o presente trabalho tem por objetivo a utilização de software computacional para a determinação da análise comportamental de um problema físico, tido como uma modelagem de um corpo de prova submetido a uma queda vertical, considerando uma dada inclinação [4], bem como a obtenção de seus parâmetros de velocidade e suas determinantes em função do tempo por intermédio de softwares livres para soluções matemáticas, como o Scilab, e demonstrar a aplicabilidade e importância da modelagem matemática em situações corriqueiras, como a queda de um objeto, ou até mesmo de um projétil considerável em queda vertical [4], visto a grande aplicabilidade de situações análogas em engenharia.

### 2. METODOLOGIA

#### 2.1. Determinação da equação diferencial governante

Tomando-se o problema de um projétil em queda vertical a partir de uma dada inclinação, considerando o meio como fluido tipo gás sendo o ar, a Equação Diferencial Ordinária da taxa da velocidade em função do tempo, obtida através das definições da força total, que age sobre a massa do projétil em queda [3], em termos dos vetores, será dada pela Eq. (1)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \alpha v\vec{v}, \quad \alpha(\rho, C_d, A, m) = \frac{\rho C_d A}{2m}, \quad (1)$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $g$  a gravidade local,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $C_d$  o coeficiente de arrasto aerodinâmico (sem unidade de medida determinada experimentalmente) que depende no número de Reynolds ( $Re$ ),  $A$  a área frontal do corpo,  $\vec{v}$  o vetor velocidade do projétil em relação ao fluido, definido como  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ , e  $v$  é o módulo do vetor velocidade de queda. Neste caso, leva-se a notar que  $F_d < 0$  por ser contrária ao sentido do movimento.

Tomando as equações equivalentes de velocidade nas componentes cartesianas decompostas, ao passo que em  $x$  não há a atuação da força gravitacional, observa-se que

$$\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x^2, \quad \frac{dv_y}{dt} = g - \alpha v_y^2, \quad (2)$$

#### 2.2. Validação do modelo: determinação dos parâmetros e definição do projétil

Para a situação descrita, foi tomado um projétil, cuja trata-se de um aço com 0,2% de carbono e 0,5 m de diâmetro. A fim de se obter a simulação comportamental do projétil e a validação do modelo matemático, tomando

a solução da velocidade em função do tempo, alguns parâmetros foram determinados de acordo como mostra a Tabela 1, vide Referência [1]

**Tabela 1.** Parâmetros do estudo de caso

Parâmetros	Especificação	Magnitude	Unidades
$\rho_p$	Massa específica do aço com 0,2% de carbono	7860,0	kg/m <sup>3</sup>
$V_p$	Volume do projétil	0,0655	m <sup>3</sup>
$\bar{g}$	Gravidade da Terra	9,7890	m/s <sup>2</sup>
$A_c$	Área de referência do corpo	0,7854	m <sup>2</sup>
$m_p$	Massa do projétil	514,4358	kg
$d_p$	Diâmetro do projétil	0,5000	m
$\rho_f$	Massa específica do fluido (ar)	1,2930	kg/m <sup>3</sup>
$\mu_f$	Viscosidade relativa do fluido (ar)	$17,2 \times 10^{-6}$	Pa·s

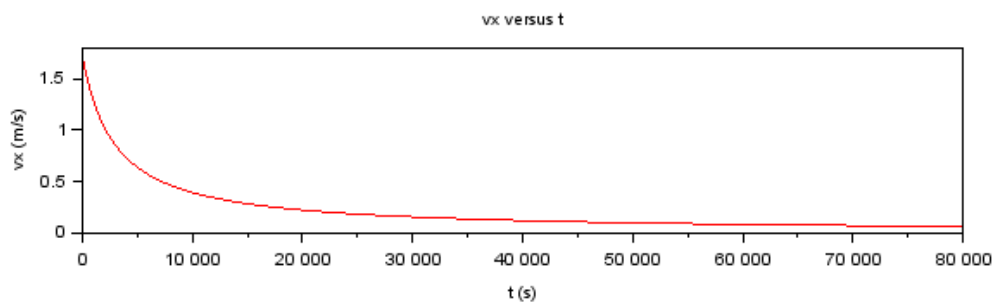
### 3. RESULTADOS

Para a situação proposta, através do software matemático livre Scilab, obteve-se os parâmetros definidos essencialmente para o conceito de força de arrasto como mostra a Tabela 2.

**Tabela 2.** Constantes definidas e calculadas

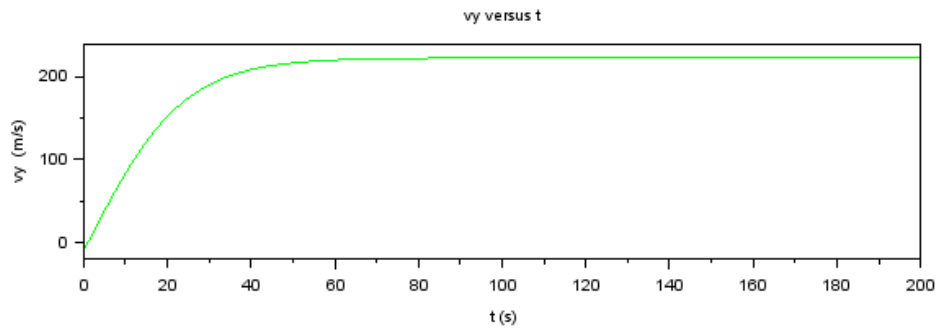
Parâmetros	Especificação	Magnitude	Unidades
$C_d$	Coefficiente de arrasto	0,2000	-
Re	Número (coeficiente) de Reynolds	$3,7016 \times 10^5$	-
$\alpha$	Constante de proporcionalidade	$1,974 \times 10^{-4}$	m <sup>-1</sup>

Dessa forma, foi possível obter graficamente os resultados comportamentais das componentes das velocidades em  $x$  e  $y$  através do comando de soluções das equações diferenciais ordinárias. Para melhor análise da componente da velocidade em  $x$ , foi definida uma inclinação inicial de  $\theta = 80^\circ$ , uma velocidade inicial de  $v_0 = 10\text{m/s}$  e um intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 80,000\text{ s}$  para a solução, obteve-se o comportamento mostrado na Figura 1.



**Figura 1.** Gráfico da componente da velocidade no eixo  $x$  do projétil em função do tempo

Da mesma forma, para a mesma inclinação e velocidade inicial, a solução da componente da velocidade em  $y$ , no entanto, com um intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 200\text{s}$  (para melhor análise), obteve-se o comportamento mostrado na Figura 2.



**Figura 2.** Gráfico da componente da velocidade no eixo  $y$  do projétil em função do tempo.

#### 4. CONCLUSÃO

Foi possível, portanto, demonstrar através do problema proposto a relação dos parâmetros envolvidos acerca das forças atuantes no projétil, tais como massa, velocidade, massa específica, viscosidade do ar, aceleração da gravidade e a área de referência do corpo, tendo por objetivo a solução das equações diferenciais ordinárias determinadas, e assim, conseguir funções de apenas uma variável independente afim de poder se ter as vastas análises comportamentais em torno do projétil, como demonstrado para as tendências de velocidades e tempo através de software computacional.

#### REFERÊNCIAS

- [1] CHIAVERINI, Vicente. **Aços e ferros fundidos**. Abm, 1979.
- [2] Fox, R.W., McDonald, A.T. and Pritchard, P.J.. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. LTC, 6ª ed., 2004.
- [3] HALLIDAY, David, Robert RESNICK, and Kenneth S. KRANE. **Física 2. v. 2**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos (1996).
- [4] MACHADO, Kleber Daum. **Equações diferenciais aplicadas à física**. Editora UEPG, 2004.