

ANÁLISE DE FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÕES EM UM SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Wilson Kataoka Oyama Filho (Bolsista/Apresentador)¹-Unifesspa

wilsonkataokaf@gmail.com

Saymon Henrique Santos Santana (Orientador do projeto)²-Unifesspa

saymon@unifesspa.edu.br

Agência Financiadora: FAPESPA

Eixo Temático/Área de Conhecimento: Matemática Aplicada / Modelagem Computacional

1. INTRODUÇÃO

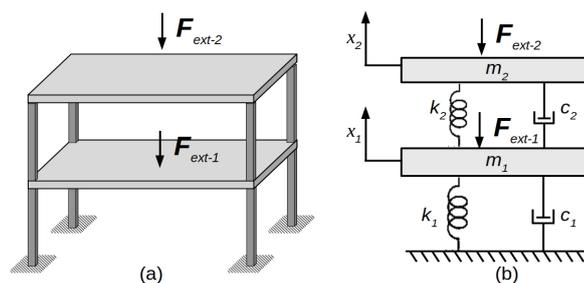
O estudo de vibrações mecânicas tem como principal objetivo descrever, através de análises matemáticas e/ou computacionais, do comportamento de sistemas físicos sobre os efeitos de vibrações. Este estudo tem ganhado relevância nas aplicações em projetos estruturais na engenharia uma vez que permitem a previsão e possível prevenção de patologias estruturais e colapsos (RAO, 2009. Meirovitch, 2001). Outrossim, as estruturas sofrem constantemente a ação de cargas fixas e móveis como tráfego de veículos, pessoas, ação dos ventos, explosões, terremotos, etc.

A compreensão precisa da resposta das estruturas às diversas solicitações figura como uma importante etapa do processo construtivo, colaborando inclusive para a escolha adequada e a consequente redução dos seus custos de produção e implementação. Incidentes como o ocorrido com a ponte pênsil Tacoma Narrows em 1940 em Washington – EUA, possivelmente seriam evitados se um estudo mais detalhado e preciso do comportamento dinâmico da estrutura tivesse sido previamente realizado. Nesta perspectiva, este trabalho visa a análise matemática e computacional de uma estrutura com dois pavimentos sujeita a ação de forças externas variáveis.

2. MODELO DINÂMICO PARA A ESTRUTURA

A Figura 1 (a) ilustra a estrutura supracitada, composta por dois pavimentos apoiados sob quatro pilares. Na Figura 1(b) é apresentado um modelo teórico idealizado no qual cada um dos pavimentos, associados às massas m_i ($i = 1, 2$), está conectado a molas de rigidez elástica k_i , cada um sujeito a forças de amortecimento linearmente proporcionais à velocidade de deslocamento do pavimento.

Figura 1: Estrutura de dois pavimentos



Fonte: Autores, 2019

V Seminário de Iniciação Científica

Talentos da Ciência e Tecnologia em ação

☰ Dias 26 e 27 de setembro de 2019

📍 Auditório e Pátio - Unidade II



Nesta situação, considerando que as resultantes das forças externas que atuam sobre os pavimentos 1 e 2 são respectivamente F_{ext1} e F_{ext2} , a aplicação da 2ª Lei de Newton conduz ao seguinte sistema de equações diferenciais acopladas.

$$x''_1 m_1 + x'_1 (c_1 + c_2) - x'_2 c_2 + x_1 (k_1 + k_2) - x_2 k_2 + F_{ext1} = 0 \quad (\text{Eq. 1a})$$

$$x''_2 m_2 + x'_2 c_2 - x'_1 c_2 + x_1 k_2 - x_2 k_2 + F_{ext2} = 0 \quad (\text{Eq. 1b})$$

Onde c_1 e c_2 são os coeficientes de amortecimento e x_1 e x_2 representam a posição instantânea dos pavimentos 1 e 2. A resolução simultânea das equações 1a e 1b para as variáveis x_1 e x_2 em função do tempo fornece a informação do deslocamento sofrido por cada pavimento em relação à sua posição de equilíbrio estável.

3. MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO

A compreensão do comportamento da estrutura está intimamente relacionado à sua frequência natural (ou modo normal) de vibração. Este parâmetro está intimamente relacionado com as características físicas e geométricas dos pilares de sustentação da estrutura, em especial seu módulo de elasticidade (E), o momento de inércia (I) e suas dimensões (comprimento e tipo de seção transversal).

A determinação dos modos normais de vibração dos pavimentos 1 e 2 (respectivamente ω_1 e ω_2) é feita considerando inicialmente o sistema livre e não amortecido, ou seja, $F_1=F_2=0$ e $c_1=c_2=0$. Deste modo, podemos supor que num instante inicial, os pavimentos oscilam harmonicamente, com mesma frequência (ω), mesma fase (φ) porém com amplitudes X_1 e X_2 , diferentes. De modo que as soluções para o movimento são dadas por:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Eq. 02a})$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{Eq. 02b})$$

Substituindo os valores das soluções do sistema nas equações 1a e 1b tem-se que:

$$\left[-\omega^2 m_1 X_1 + (k_1 + k_2) X_1 - k_2 X_2 \right] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (\text{Eq. 03a})$$

$$\left[-\omega^2 m_2 X_2 + k_2 X_2 - k_2 X_1 \right] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad (\text{Eq. 03b})$$

Visto que as equações resultantes devem ser satisfeitas para todos os valores de tempo t , os termos entre colchetes devem ser iguais à zero. Além disso, para que seja possível a obtenção uma solução não trivial, os valores de amplitude de x_1 e x_2 não podem ser iguais à zero. Sendo assim, adotando uma notação matricial, o determinante da matriz de coeficientes das amplitudes mostrada na Equação 04, a seguir, deve ser nula.

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 m_1 + (k_1 + k_2)) & -k_2 \\ -k_2 & (-\omega^2 m_2 + k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 04})$$

Ou seja

$$m_1 m_2 (\omega^2)^2 - [k_2 m_1 + m_2 (k_1 + k_2)] \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \quad (\text{Eq. 05})$$

A resolução da Equação 05 para os valores de ω^2 fornece expressões para os modos normais de vibração ω_1 e ω_2 de cada um dos pavimentos. De modo que:



V Seminário de Iniciação Científica

Talentos da Ciência e Tecnologia em ação

☰ Dias 26 e 27 de setembro de 2019

📍 Auditório e Pátio - Unidade II



$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{[m_2(k_1+k_2)+k_2m_2]}{2m_1m_2} \pm \frac{[(-m_2(k_1+k_2)-k_2m_2)-4m_1m_2k_1k_2]^{1/2}}{2m_1m_2} \quad (\text{Eq. 06})$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de validar o modelo proposto para um cenário mais real, foram considerados valores do módulo de Young em pilares com as seguintes características:

- Seção transversal retangular de 30cm X 40cm.
- Comprimento de 7 metros.
- Momento de inércia com de $1,6 \times 10^{-3} \text{m}^4$

Nessas condições, as constantes de rigidez elástica dos pilares são $k_1=k_2= 261232.653 \text{ N/m}$. A Tabela 02, a seguir, mostra valores para os modos normais de vibração ω_1 e ω_2 em função da massa total dos pavimentos.

Tabela 1: Resultados de módulos normais de vibração.

Massa total dos pavimentos	Valores dos módulos normais de vibração
5 toneladas	$\omega_1 = 4.4672585 \text{ (rad/s)}$ $\omega_2 = 11.695435 \text{ (rad/s)}$
10 toneladas	$\omega_1 = 3.1588288 \text{ (rad/s)}$ $\omega_2 = 8.2699212 \text{ (rad/s)}$
15 toneladas	$\omega_1 = 2.5791729 \text{ (rad/s)}$ $\omega_2 = 6.7523624 \text{ (rad/s)}$
20 toneladas	$\omega_1 = 2.2336293 \text{ (rad/s)}$ $\omega_2 = 5.8477174 \text{ (rad/s)}$

Fonte: Autores, 2019.

Fenômenos como batimentos e ressonância podem ocorrer para intervalos específicos de valores de frequência da força externa. Desse modo, observando os valores obtidos para os modos normais dos pavimentos, é possível inferir que quanto maior as cargas suportadas pelos pilares, menores serão os valores de frequência natural do sistema, tornando-o menos provável de entrar em ressonância com forças externas com frequências de oscilação mais elevadas. Vale ressaltar que, devido ao número de graus de liberdade do sistema, há ainda a possibilidade de que o mesmo apresente comportamento caótico (Hirsch et al, 2004).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tratou da análise matemática dos modos normais de vibração para uma estrutura em engenharia civil composta por dois pavimentos, sustentados por quatro pilares. Os valores estimados para as frequências naturais permitem compreender e prever a resposta da estrutura a diversas ações externas, conhecer as frequências de forças externas que devem ser evitadas. Todas essas variáveis devem ser levadas em consideração durante a fase de elaboração de um projeto de uma estrutura em engenharia civil.

V Seminário de Iniciação Científica

Talentos da Ciência e Tecnologia em ação

📅 Dias 26 e 27 de setembro de 2019

📍 Auditório e Pátio - Unidade II



REFERÊNCIAS

Meirovitch, L. *Fundamentals of Vibrations*. 1ª ed. MacGraw-Hill Book Co, 2001.

Rao, S. S. *Mechanical Vibrations*. 5ª ed. Pearson Prantice Hall, 2009.

Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. **Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos**. 2nd ed. Elsevier. 2004