MECÂNICA CLÁSSICA: UMA ANÁLISE DO SISTEMA MECÂNICO PELO FORMALISMO DE LAGRANGE

WIllian dos Santos Ferreira [1]
Eliane Pereira[2]

Agência Financiadora: FAPESPA

Eixo Temático/Área de Conhecimento: Mecânica clássica, física e matemática aplicada/Mecânica clássica

1 INTRODUÇÃO

A mecânica clássica possui diversos formalismos que contribuem para sua existência e uma delas com importância ímpar é o formalismo de Lagrange. Este teve seu desenvolvimento por Joseph-Louis Lagrange e sua primeira publicação é encontrada no livro Méchanique Analytique de 1788 (DIAS, 2006). O formalismo de Lagrange apresenta vantagens na obtenção das equações de movimento se comparado com formalismo newtoniano. O ponto de partida para o mesmo é o princípio de Hamilton, mas para o seu desenvolvimento é necessário alguns conceitos prévios tais como vínculos e a utilização de coordenadas generalizadas.

A equação de Lagrange caracteriza-se pela facilidade da obtenção das equações de movimento do sistema, sendo isso possível graças ao emprego dos vínculos que apresentam um papel importante, uma vez que são responsáveis por diminuir a quantidade de equações presentes no sistema mecânico.

Para o presente trabalho, a resolução de um problema clássico do cálculo variacional, mostrando a importância do cálculo e os benefícios e vantagens que este pode oferecer quando empregado e para tal contou com o apoio financeiro da FAPESPA para o desenvolvimento das atividades da pesquisa.

2 MATERIAS E MÉTODOS

A metodologia utilizada consiste em uma revisão bibliográfica dos conceitos aplicados na mecânica clássica enfatizando essencialmente o formalismo de Lagrange. As principais referências utilizadas para o embasamento teórico foram (LEMOS, 2007) e (NETO, 2004). Para meios de discussão utilizou-se da solução do problema proposto verificando a eficácia do método e a forma de aplicação focando nas suas vantagens e benefícios.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O Princípio de Hamilton ou princípio da mínima ação, consiste na solução de máximos e mínimos em um espaço de função denominado de funcional. Deste modo, o funcional é associado a um número real com base na sua função ou classificação, de modo a defini-lo (LEMOS, 2007). O princípio de Hamilton descreve o movimento de um sistema mecânico pelo funcional S que depende da lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$, do instante t_1 ao instante t_2 (LEMOS, 2007) de modo que a ação seja: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$.

A caracterização do funcional ou ação consiste em um instante t, suas coordenadas generalizadas $q_1,\ldots,q_n$ e suas velocidades $\dot{q}_1,...,\dot{q}_n$ onde as mesma estão expressas na função $L = L(q,\dot{q},t)$, denominada

[1] UNIFESSPA-IEA, willian.santos@unifesspa.edu.br
[2] UNIFESSPA-IEA, elianepereira@unifesspa.edu.br

de lagrangiana do sistema, de modo que a ação seja mínima para a trajetória real mantendo assim, os pontos fixos no início e no final do espaço de configuração (LEMOS, 2007). No Exemplo 1 a seguir, demonstraremos segundo (LEMOS, 2007) a importância do funcional e a obtenção da equação de Euler-Lagrange.

Exemplo 1: Seja (x_1, y_1) e (x_2, y_2), dois pontos distintos num plano, sendo $x_2 > x_1$, de modo que $y(x)$ seja uma curva ligando os pontos. Podemos mostra que o comprimento do arco infinitesimal no plano é dado por

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

o comprimento do arco de uma curva, entre os pontos inicial e final é dado pela seguinte equação:

$$s[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx, \tag{1}$$

o que nos mostra que o comprimento do arco s é um funcional de y, isto é, a cada função continuamente diferenciável $y(x)$ corresponde ao único número real $s[y]$ definido pela Equação (1). Utiliza-se a equação do funcional2, para deduzir a equação do princípio variacional

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x), y'(x), x) dx, \tag{2}$$

para extremar a curva J utilizaremos artifícios para reduzir o problema em achar os pontos extremos da função. Assim sendo $y(x)$ a função procurada e $\bar{y}$ uma função vizinha, assim podendo aproximar as extremidade de J sendo $\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$, onde ε e um valor real arbitrário e $\eta(x)$ e uma função de x que se anula nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), desta forma:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0, \tag{3}$$

a condição 3 e necessária para que a curva variada $\bar{y}$ passe pelos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Desta forma, substituindo y por $\bar{y}$ na equação 2, assim obtendo a seguinte equação:

$$\Phi(\varepsilon) \equiv J[\bar{y}] = \int_{x_1}^{x_2} f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x), x), \tag{4}$$

por hipótese $y(x)$, fornece os extremos da função J. Assim a função $\Phi_{(\varepsilon)}$ deve passar nos extremos quando $\varepsilon = 0$, pois, apresenta uma relação de igualdade entre $\bar{y}$ e y. Desta forma chegando a uma condição que $y(x)$ e J possam passar pelos pontos de extremos.

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{y}}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}'}\frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varepsilon}\right) dx = 0, \tag{5}$$

decorrente da equação 4, será realizado uma derivada parcial em relação a ε, assim chegando no seguinte resultado $\partial\bar{y}/\partial\varepsilon = \eta$, de forma análoga para $\partial\bar{y}'/\partial\varepsilon$, obtendo o seguinte resultado $\partial\bar{y}'/\partial\varepsilon = \eta'$. Substituindo esse resultado na equação 5, obtemos a seguinte equação

$$\frac{d\Phi}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0, \tag{6}$$

a fim de extrair uma equação para $y(x)$ temos que eliminar a variável η', isso é possível através da aplicação das regras de derivação e integração, assim utilizaremos a regra do produto na seguinte parte da equação $(\partial f/\partial y')\eta'$, logo após será realizado uma integração por parte na equação 6, chega no seguinte resultado

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \eta(x) dx = 0, \tag{7}$$

utilizando o lema fundamental do cálculo, se $M(x), x_1 \leq x \leq x_2$, é uma função contínua tal que $\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta(x)dx = 0$, qual quer que seja a função contínua $\eta(x)$ com $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, então $M(x) \equiv 0$ em $[x_1, x_2]$. Por tanto, as condições necessárias para se obter a equação de Euler.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{8}$$

A equação de Euler, trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem, em sua resolução geral, podemos obter duas constates arbitrária que usualmente nos permite encontrar as condições de contorno de uma curva onde a mesma passe pelos pontos extremos fixos. Para obtermos a equação de Euler-Lagrange será realizado uma simples mudança de notação $x \rightarrow t$, $y \rightarrow q$, $y' \equiv \frac{dy}{dx} \rightarrow \dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$, $f \rightarrow L$, $J \rightarrow S$ na equação 8. Assim temos a equação de Euler-Lagrage,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{9}$$

Considerando o movimento de uma partícula em um determinado espaço tridimensional, apresenta n grau de liberdades ou vínculos (NETO, 2004). Os vínculos são caracterizados como Holônomos que está definido pela sua relação entre posição e tempo e Não-Holônomos que se define pela sua dependência da velocidade. A utilização dos vínculos no formalismo de Lagrange se torna uma ferramenta eficaz na resolução das equações de movimento, pois aparte delas e possível diminuir a quantidade de equações (LEMOS, 2007). Desta forma, o sistema de n graus de liberdade representado pela equação 9 é possível obter a equação de movimento de um sistema mecânico.

Problema: Obtenha as equações de movimento do sistema mecânico pelo formalismo de Lagrange, considerando desprezíveis as massas da roldana e do fio inextensível, a altura da mola e o comprimento da corda sendo l.

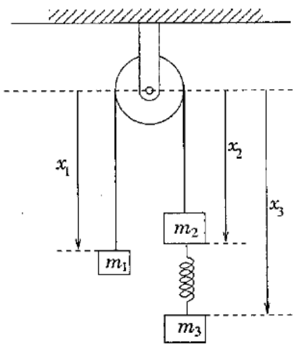

Figura 1 – Sistema mecânico

Solução: O vínculo do sistema e dado por $x_1 + x_2 = l_0$, onde l_0 é a constante determinada pelo comprimento do fio e pelo raio da roldana. O sistema só pode assumir duas coordenadas generaliza, pois apresenta apenas dois graus de liberdade, escolhemos x_2 e x_3 como coordenadas generalizadas. A energia cinética e dada por

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_3\dot{x}_3^2}{2} \longrightarrow T = \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2, \tag{10}$$

para encontra a equação da energia potencial gravitacional, será adotando o nível zero que passa pelo centro da pólia. Ressaltando que os pontos apontados abaixo da linha do referência tem sinal negativo, a equação da energia potencial é dada por $V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 - m_3gx_3 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2$, simplificando a equação temos

$$V = -(m_2 - m_1)gx_2 - m_1gl_0 - m_3gx_3 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2, \tag{11}$$

após encontramos as equações da energia cinética (10) e a energia potencia gravitacional (11), podemos substituir na equação de Lagrange $L = T - V$, logo:

$$L = \frac{(m_1+m_2)}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2 + (m_2 - m_1)gx_2 + m_1gl_0 + m_3gx_3 - \frac{k}{2}(x_3 - x_2 - l)^2, \tag{12}$$

usando a equação de Euler-Lagrange 9 , podemos obter duas equações de movimento sendo a outra x_2 e x_3. A equação de Euler-Lagrange para x_2 é

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = 0, \tag{13}$$

as derivadas parciais em relação a x_2 e $\dot{x}_2$ obtemos os seguinte resultados: $\partial L/\partial x_2 = (m_2 - m_1)g + k(x_3 - x_2 - l)$ e $d/dt(\partial L/\partial \dot{x}_2) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_2$, assim obtendo a equação do movimento $(m_1 + m_2)\ddot{x}_2 - (m_2 - m_1)g - k(x_3 - x_2 - l) = 0$, equação de Lagrange para x_3:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = 0, \tag{14}$$

realizando a derivada parcial de forma análoga à equação do movimento x_2, será realizada para x_3, assim obtendo a seguinte equação $m_3\ddot{x}_3 - m_3 g + k(x_3 - x_2 - l) = 0$, sendo que $k = 0$ não interagi com m_2 e m_3, desse modo as equações de Lagrange podem ser restringidas, assim m_3 cai em queda livre $\ddot{x}_3 = g$, assim sendo a aceleração da gravidade e $\ddot{x}_2 = [(m_2 - m_1)g/(m_1 + m_2)]$ apresenta em estado de equilíbrio.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os estudos realizados para o presente trabalho foi possível aplica o formalismo de Lagrange em um sistema mecânico composto por uma pólia com massa desprezível, fio inextensível e três blocos de massas, onde uma das massas está conectada pela mola, desta forma o problema consiste em empregar o formalismo de Lagrange para encontra as equações de movimento, onde a mesma apresentam dois graus de liberdade, logo foi gerado duas equações de movimento. A análise do formalismo de Lagrange apresenta vantagens quando comparado ao formalismo newtoniano na obtenção das equações de movimento, isso é possível, pois o formalismo de Lagrange tem sua base no princípio variacional enquanto o formalismo de newtoniano que tem sua base nas equações de força. Nesse contexto o formalismo Lagrange se destaca na obtenção das equações de movimento.

O formalismo apresentado pode ser aprofundado buscando sistemas mais complexos para a sua implementação, podendo utilizar os multiplicadores de Lagrange, onde o mesmo utiliza vínculos não-holônomos, diferente dos vínculos empregado no trabalho, assim podendo ser um tema de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

DIAS, P. M. C. F=ma?!! O nascimento da lei dinâ mica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 28, p. 205 – 234, 06 2006. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172006000200013&nrm=iso>.

LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

NETO, J. B. **Mecânica Newtoniana, Lgrangiana e Hamiltoniana**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.